Klasse 11

Themen	Verbindliche Themen und Inhalte	Inhaltsbezogenen Kompetenzen (Leitidee)	Dauer
Analysis	**Differenzialrechnung, Extrempunkte, Wendepunkte**	Die Schülerinnen und Schüler	18 Wo
	• mittlere Änderungsrate (1) • Differenzenquotient einer Funktion • Sekantensteigung	• bestimmen die mittlere Änderungsrate und deuten sie im Sachzusammenhang (L2)	
	• Grenzwerte von Folgen von Funktionswerten reeller Funktionen – Limes (2) und (3) • lokale Änderungsrate • Differenzialquotient (4) • Tangentensteigung • Schnittwinkel von Graphen • Stetigkeit, Differenzierbarkeit (Sprünge erklären) • Ableitung • Newton-Verfahren • Ableitungsfunktion (5) • Ableitungsregeln (Summen-, Faktor-, Potenz- und Kettenregel) • grafisches Differenzieren (vorwärts und rückwärts)	• nutzen Grenzwerte zur Bestimmung von Ableitungen (L1) • erläutern den Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten (L2) • deuten die lokale Änderungsrate im Sachzusammenhang (L2) • nutzen die Definition des Differenzialquotienten, um die lokale Änderungsrate numerisch zu bestimmen (L2) • deuten den Schnittwinkel zwischen den Graphen als Winkel zwischen den Tangenten an die Graphen im Schnittpunkt (L2) • deuten die Ableitung als lokale Änderungsrate und interpretieren sie in Sachzusammenhängen (L4) • **deuten die Ableitung im Zusammenhang mit der lokalen Approximation einer Funktion durch eine lineare Funktion (L4)** • interpretieren die Ableitungsfunktion im Sachzusammenhang (L4) • entwickeln Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen und umgekehrt (L4) • berechnen näherungsweise Nullstellen von Funktionen (L1)	
	• ganzrationale Funktionen (6), (7), (8) • Wurzelfunktionen, $f(x) = 1/x$, $f(x) = x^q$ mit $q \in Q$ • Verknüpfungen • Verkettungen	• nutzen Funktionen verschiedener Funktionsklassen zur Modellierung, Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge (L4) • stellen funktionale Zusammenhänge in verschiedener Formen dar und wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Graph, Tabelle, Term und verbaler Beschreibung (L4) • bestimmen Funktionen oder Parameter in Funktionstermen aus Bedingungen an die Funktion oder deren Ableitungen (L4)	

	• Monotonie • Definitionsbereich • lokale und globale Extrema (Hochpunkt, Tiefpunkt, Randextrema) • Links-, Rechtskrümmung • Wendepunkte als Punkte des Graphen mit lokal extremer Steigung, in dem sich die Krümmungsrichtung des Graphen ändert • Sattelpunkt • Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrem- und Wendestellen	• bilden Ableitungen der Funktionen der genannten Funktionsklasse (L4) • nutzen die Ableitungsfunktionen (auch höherer Ordnung) zur Klärung des Monotonieverhaltens und der Bestimmung von charakteristischen Punkten des Graphen einer Funktion (L4) • deuten die zweite Ableitung als Steigungsfunktion der ersten Ableitung (L4) • deuten das Vorzeichen der zweiten Ableitung als Indikator für die Krümmungsrichtung des Graphen der Ausgangsfunktion • lösen Optimierungsprobleme mit Mitteln der Analysis (L4)	
Stochastik	**Grundbegriffe der Stochastik, bedingte Wahrscheinlichkeit Zufallsgröße (Erwartungswert, Streuungsmaße)**	**Die Schülerinnen und Schüler**	**7 Wo**
	• Relative Häufigkeiten • Zufallsexperiment • Tabellenkalkulationsprogrammen und deren Funktionen sind zu nutzen • Ergebnis und Ergebnismenge • Laplace-Experiment • Ereignis, Gegenereignis und Ereignismenge (9) • Vereinigungen und Schnitte von Ereignissen (10) • Wahrscheinlichkeit • Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten (Axiome von Kolmogorov)	• beschreiben Zufallsexperimente und zugehörige Ereignisse mithilfe der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (L5) • Verwenden den Computer zur Simulation von Zufallsexperimenten (L5) • nutzen eine präzise mathematische Schreibweise zur Notation von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen und versprachlichen diese (L5)	
	• Zufallsgröße als Abbildung von der Ergebnismenge in die reellen Zahlen (11) • Berechnung von Wahrscheinlichkeiten der Form P(X=k) und $P(k_1 \leq X \leq k_2)$ (12)	• nutzen Zufallsgrößen zur Modellierung von realen Situationen (L5) • interpretieren Kenngrößen von Zufallsgrößen in Bezug auf die vorliegende Situation (L5)	
	• Baumdiagramm • Inverses Baumdiagramm • Vierfeldertafel • Bedingte Wahrscheinlichkeit (13) • Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen	• modellieren und lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen (L5) • untersuchen Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit (L5) • bearbeiten reale Problemstellungen, indem sie mit diskreten	

		Zufallsgrößen modellieren (L5)	
Geometrie	**Vektoren im R^2 und R^3, Geraden und Ebenen, Lagebeziehungen**	**Die Schülerinnen und Schüler**	**6 Wo**
	• Punkte, Strecken, Polygone, Körper (14) • Vektoren im zwei- und dreidimensionalen Raum (15) • Nullvektor Gegenvektor • Addition von Vektoren • Multiplikation von Vektoren mit Skalaren • Vektorgleichungen • Linearkombination • lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit (16)	• stellen geometrische Objekte im (kartesischen) Koordinatensystem dar (L3) • reduzieren geometrische Situationen auf aussagekräftige Skizzen (L3) • beschreiben geometrische Objekte mithilfe von Vektoren (L3) • interpretieren Vektoren im zwei- und dreidimensionalen Raum als Ortsvektoren oder Verschiebungen (L3) • rechnen mit n-Tupeln und wenden die Rechengesetze eines Vektorenraumes (L1) • führen elementare Operationen mit Vektoren aus und interpretieren diese geometrisch (L3) • stellen Vektoren als Linearkombination anderer Vektoren dar und deuten diese geometrisch (L3) • untersuchen Vektoren auf lineare Abhängigkeit und deuten diese geometrisch (L3)	
	• Geradengleichung (Parameter) • Ebenengleichung in Parameterform (17)	• beschreiben Geraden und Ebenen im R^3 (L3) • verstehen die Parametergleichung einer Geraden (Ebene) im R^3 als eine Funktion $R \rightarrow R^3$ ($R^2 \rightarrow R^3$) und modellieren so Bewegungen im Raum (L4)	
	• Lagebeziehungen von Geraden zu Geraden und Geraden zu Ebenen	• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen und bestimmen die zugehörige Schnittmenge (L3) • interpretieren das Lösen linearer Gleichungssysteme als Schnittproblem (L3)	

Klasse 12

Themen	Verbindliche Themen und Inhalte	Inhaltsbezogenen Kompetenzen (Leitidee)	Dauer
Analysis	**Integralrechnung**	**Die Schülerinnen und Schüler**	**10 Wo**
	• Rechteckmethode, Approximation von Flächeninhalten (18) • Integralfunktion (Integrand, Integralwert) (19) (20) • Stammfunktion • Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung • bestimmtes Integral • Integrationsregeln: Additivität, Linearität, • **uneigentliches Integral (21)**	• deuten das bestimmte Integral in Sachzusammenhängen, zum Beispiel als aus der Änderungsrate rekonstruierter Bestand (L4) • begründen den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung inhaltlich als Beziehung zwischen Ableitung- und Integralbegriff (L4) • deuten die Schreibweise des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Folge verfeinerter Messergebnisse (L2) • bestimmen den Inhalt von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenz werden, und deuten diese Flächeninhalte im Sachzusammenhang (L2) • berechnen bestimmte Integrale mitteln Stammfunktion und Näherungsverfahren (L4) • nutzen Grenzwerte zur Bestimmung von Integralen (L1)	
	• **Rotationskörper, Rotationsvolumen (22)**	• bestimmen den Rauminhalt von Rotationskörpern (L2)	
Geometrie	**Skalarprodukt,Vektorprodukt, Abstände**	**Die Schülerinnen und Schüler**	**9 Wo**
	• Länge (Betrag) von Vektoren • Skalarprodukt (23) • Maß des Winkels zwischen Vektoren, zwischen Geraden, zwischen Geraden und Ebenen sowie zwischen Ebenen • Normalen- und Koordinatenform • **Lagebeziehungen Ebenen zu Ebenen** • Vektorprodukt • Flächeninhalt von Dreiecken und Parallelogrammen • **Spatvolumen** • **Abstand zwischen Punkten, Geraden und Ebenen (24) (25)** • **Lotfußpunktverfahren (26)**	• bestimmen Abstände, Winkel, Flächen- und Rauminhalten von Objekten im R^3 (L2) • nutzen das Skalarprodukt zur Längenbestimmung projizierter Vektoren und zur Winkelbestimmung (L2) • nutzen das Vektorprodukt zur Bestimmung von Flächeninhalten (L2) • nutzen die Rechengesetze für Skalarprodukt und Vektorprodukt zum Berechnen und Umformen von Termen sowie zum Lösen von Vektorengleichungen (L1) • deuten das Skalarprodukt und das Vektorprodukt geometrisch (L3) • untersuchen die Lagebeziehungen von Ebenen und bestimmen die zugehörige Schnittmenge (L3) • beschreiben Ebenen im R^3 (L3) • verstehen die Parametergleichung einer Geraden (Ebene) im R^3 als eine Funktion $R \rightarrow R^3$ ($R^2 \rightarrow R^3$) und modellieren so Bewegungen im Raum (L4)	

<table>
<tr><td>Analysis</td><td>e-Funktion, Vertiefung der Differenzial- und Integralrechnung an ausgewählten Funktionsklassen</td><td>Die Schülerinnen und Schüler</td><td>6 Wo</td></tr>
<tr><td></td><td>• Produktregel
• Exponentialfunktionen
• e-Funktion (27)
• Logarithmusfunktion (insbesondere ln-Funktion)
• Sinusfunktion
• Kosinusfunktion
• Exponentialgleichungen/Logarithmusgleichungen
• Umkehrfunktionen

Integrationsregeln: partielle Integration, Substitution an einfachen Beispielen

• Verschiebung in x- bzw. y-Richtung
• Streckung in x- bzw. y-Richtung
• Spiegelung an der x- bzw. y-Achse
(auf alle Funktionsgruppen)</td><td>• nutzen Funktionen verschiedener Funktionsklassen zur Modellierung, Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge (L4)
• stellen funktionale Zusammenhänge auf und in verschiedener Formen dar und wechseln situationsgerecht (L4)
• bilden Ableitungen der Funktionen der genannten Funktionsklasse (L4)
• charakterisieren die e-Funktion als eine Funktion, die sich selbst als Ableitung hat. (L4)
• nutzen die Ableitungsfunktionen (auch höherer Ordnung) zur Klärung des Monotonieverhaltens und der Bestimmung von charakteristischen Punkten des Graphen einer Funktion (L4)
• nutzen die ln-Funktion als Stammfunktion von f(x) = 1/x und als Umkehrfunktion der e-Funktion (L4)
• beschreiben die Veränderung des Graphen von f beim Übergang von f(x) zu f(x)+c, c·f(x), f(x+c), f(c·x) (L4)
• bestimmen Funktionen oder Parameter in Funktionstermen aus Bedingungen an die Funktion oder deren Ableitungen (L4)</td><td></td></tr>
<tr><td>Stochastik</td><td>Binomialverteilung, Hypergeometrische Verteilung, Normalverteilung</td><td>Die Schülerinnen und Schüler</td><td>10 Wo</td></tr>
<tr><td></td><td>• Median (Zentralwert)
• arithmetischer Mittelwert (28)
• Spannweite
• Wahrscheinlichkeitsverteilung (29)
• Häufigkeitsverteilung
• Histogramm
• Mittelwert (30)
• Erwartungswert
• Varianz und Standardabweichung als Streuungsmaße (31)
• Urnenmodell: Ziehen mit und ohne Zurücklegen
• Bernoulli-Experiment
• Bernoulli-Kette</td><td>• werten Daten aus, indem sie geeignete Lage- und Streumaße auswählen und anwenden (L2)
• deuten den Median und den arithmetischen Mittelwert als mögliche Ergebnisse von Messprozessen zur Bewertung von Daten (L2)
• entwickeln Terme zur Beschreibung der Streuung (L2)
• deuten den Term der Varianz als ein mögliches Ergebnis eines Messprozesses zur Erfassung der Streuung der Daten (L2)
• berechnen und deuten den Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen (L2)
• nutzen Zufallsgrößen und deren Verteilung zur Modellierung</td><td></td></tr>
</table>

	• Binomialverteilungen mit Erwartungswert und Standardabweichung (32) • Hypergeometrische Verteilung	von realen Situationen (L5) • interpretieren Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Prognose von zu erwartenden Häufigkeitsverteilungen (L5) • deuten Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen als Funktionen und nutzen diese zur Beschreibung stochastischer Situationen (L4) • bearbeiten reale Problemstellungen, indem sie mit diskreten Zufallsgrößen modellieren (L5)	

Klasse 13

Themen	Inhalte	Inhaltsbezogenen Kompetenzen (Leitidee)	Dauer
Analysis	**Funktionenscharen, Vertiefung der Differenzial- und Integralrechnung an ausgewählten Funktionsklassen**	**Die Schülerinnen und Schüler**	**6 Wo**
	• Funktionsscharen	• nutzen Funktionen verschiedener Funktionsklassen zur Modellierung, Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge (L4) • stellen funktionale Zusammenhänge auf und wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen (L4) • bestimmen Funktionen/Parameter aus Bedingungen (L4)	
	• Ortskurven von charakteristischen Punkten	• nutzen die Ableitungsfunktionen (auch höherer Ordnung) zur Klärung der Bestimmung von charakteristischen Punkten des Graphen einer Funktion (L4)	
Geometrie	**Kreis und Kugel, Vertiefung der analytischen Geometrie**		**5 Wo**
	• Kugelgleichung, Kreisgleichung (33)	• beschreiben Kugeln im R³ (L3)	
	• Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen zu Kugeln • Tangentialebenen	• untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen zu Kugeln (L3)	
Stochastik	**Signifikanztest, Schätzen von Wahrscheinlichkeiten**		**6 Wo**
	• **Normalverteilung:** $\varphi_{\mu;\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ **(34) (35)** • **Standardnormalverteilung** $\varphi_{0;1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{-1}{2}x^2}$ **(36)** • **Die Gaußsche Integralfunktion $\Phi_{0;1}$** • **Bedingung und Näherungsformel von Moivre und Laplace:** • $P(X\leq k)\approx\Phi_{0;1}\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right)$ **(37)** • **zweiseitiger Hypothesentest (38)** • **Nullhypothese** • **Fehler 1. und 2. Art** • **Signifikanzniveau** • **Verwerfungsbereich**	• **beschreiben Binomialverteilungen näherungsweise durch Anpassung einer standardisierten „Glockenfunktion“ $\varphi_{0:1}(x)$ (L4)** • **interpretieren die Bedeutung der in der Funktionsgleichung einer Normalverteilung auftretenden Parameter (L5)** • **beurteilen, wann eine binomialverteilte Zufallsgröße durch eine Normalverteilung angenähert werden kann (L5)** • **berechnen Näherungswerte binomialverteilter Zufallsgrößen und nutzen dazu die Normalverteilungsfunktion des Taschenrechners (L5)** • **konzipieren Hypothesentests und interpretieren die Fehler 1. Und 2. Art (Testen) (L5)** • **ermitteln aus einem**	

	• Konfidenzintervall • Rechtseitiger und linksseitiger Hypothesentest (39)	Stichprobenergebnis/Testergebnis ein Vertrauensintervall für die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit (Schätzen) (L5)	

Anmerkungen und Hinweise

Klasse 11

(1) Zum Aufbau einer Grundvorstellung sollten Zeichnungen herangezogen werden
(2) Es reicht die intuitive Erfassung des Grenzwertbegriffes. Die Schreibweise „lim“ kann auch ohne formale Definition verwendet werden.
(3) Es sollten links-, rechts- und beidseitige Grenzwertprozesse betrachtet werden.)
(4) Der Übergang vom Differenzen- zum Differenzialquotienten sollte durch Grenzwertprozesse intuitiv erfasst und mit dem DGS veranschaulicht werden.
(5) Es genügt ein intuitives Verständnis der Stetigkeit und Differenzierbarkeit.
(6) Die Unterscheidung der Begriffe Stelle, Funktionswert und Punkt ist deutlich herauszuarbeiten.
(7) Um die funktionale ‚Abhängigkeit zu betonen, ist die in der Sekundarstufe I eingeführte Schreibweise „f(x) = .. „ beizubehalten.
(8) Wertetabellen können schnell mit entsprechenden Funktionen des Taschenrechners erstellt werden.
(9) Ereignisse sollen als Teilmengen der Ergebnismenge eingeführt werden.
(10) Der Vereinigungsmenge von Ereignissen (Oder-Ereignisse) oder der Schnittmenge von Ereignissen (Und-Ereignis) kommt eine besondere Bedeutung zu.
(11) Es soll mit einfachen Zufallsgrößen begonnen werden, die nicht binomial oder hypergeometrisch verteilt sind.
(12) Es muss erkannt werden, dass X=k eine Teilmenge der Ergebnismenge ist.
(13) Ziel soll das sichere Modellieren mit den genannten Darstellungen sein, nicht unbedingt die Formel von Bayes. Auf eine präzise Notation und Versprachlichung der bedingten Wahrscheinlichkeit ist zu achten.
(14) Das räumliche Vorstellungsvermögen soll auch durch Modelle und den Einsatz von dynamischen Geometrieprogrammen gefestigt werden.
(15) Durch die Interpretation von Vektoren als Verschiebungen kann auf ihre Definition als Äquivalenzklasse (Pfeilklasse) verzichtet werden.
(16) Anhand von ausgewählten Beispielen sollen die Eigenschaften geometrischen Objekte mithilfe algebraischer Methoden analysiert und beschrieben werden.
(17) Auch im Computer-Algebra-Systemen werden Parameterformen von Geraden und Ebenen als Funktionen aufgefasst.

Klasse 12

(18) Es genügt, Rechteckstreifen zur Approximation zu betrachten.
(19) Zur Bestimmung der Werte bestimmter Integrale sollen auch digitale Werkzeuge eingesetzt werden.
(20) Es sollen auch Sachprobleme betrachtet werden, bei denen ein negativer Intergralwert im Sachzusammenhang eine Bedeutung hat.
(21) Es soll ein intuitives Verständnis von uneigentlichen Integralen gewonnen werden.)
(22) Es genügt, die Rotation um die x-Achse zu betrachten.
(23) Bereits vor Einführung des Skalarproduktes sollen Beträge von Vektoren mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden.
(24) Bei der Untersuchung von Lagebeziehungen bietet sich die Koordinatenform an.
(25) Die Berechnung der minimalen Entfernung von zwei sich auf Geraden bewegenden Objekten führt beispielsweise auf eine Bestimmung des globalen Minimums der von gemeinsamen Parametern abhängigen Entfernungsfunktion.
(26) Anhand von ausgewählten Beispielen sollen die Eigenschaften geometrischen Objekte mithilfe algebraischer Methoden analysiert und beschrieben werden.
(27) Motivation für die Einführung der Eulerschen Zahl e kann die Suche nach Funktionen sein, die sich selbst als Ableitung haben.
(28) Mittelwert und Streuung sollten auch an von Schülerinnen und Schüler durchgeführten Zufallsexperimenten ermittelt werden.
(29) Es genügt, einfache Verteilungen zu betrachten, bei denen die Zufallsgröße nur wenige verschiedene Werte annehmen kann, um den Grundgedanken des Erwartungswertes und des Streumaßes herausarbeiten.
(30) Ausgehend vom Mittelwert einer Häufigkeitsverteilung kann die allgemeine Berechnung des Erwartungswertes motiviert werden.
(31) Zur Berechnung von Erwartungswert und Varianz von Zufallsgrößen mit vielen Werten bietet sich der Einsatz einer Tabellenkalkulation an.

(32) Zur Bestimmung von (auch kumulierten) Wahrscheinlichkeiten soll der Taschenrechner genutzt werden. Auf die Nutzung von Tabellen soll so weit wie möglich verzichtet werden.

Klasse 13

(33) Die Kugelgleichung soll lediglich als ein weiteres Beispiel einer algebraischen Darstellung einer speziellen Punktmenge eingeführt werden.
(34) Es empfiehlt sich eben diese Bezeichnung zu verwenden.
(35) Die Normalverteilung soll lediglich der Approximation von Binomialverteilungen dienen. Normalverteilte Zufallsgrößen müssen nicht betrachtet werden. Der Aspekt der Normalverteilung als Dichtefunktion muss nicht thematisiert werden.
(36) Über die Eigenschaften der Funktion $\varphi_{0;1}$ können die Sigmaregeln thematisiert werden.
(37) Die Nährungsformel von Moivre und Laplace kann dann durch

$$P(X \leq k) \approx \int_{-\infty}^{k+0,5} \varphi_{\mu;\sigma}(x)\,dx = \Phi_{\mu;\sigma}(k+0,5) = \Phi_{0;1}\left(\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}\right)$$

dargestellt werden.
(38) Während es beim zweiseitigen Hypothesentest zunächst um die Bestimmung eines Verwerfungsbereiches zu einer angenommenen und zu testenden Wahrscheinlichkeit geht (Testen), stellt sich beim Schätzen die Frage, für welche angenommene Wahrscheinlichkeit das Stichprobenereignis nicht im Verwerfungsbereich liegt.
(39) Bei einseitigen Hypothesentests kommt es auch auf eine Begründung der gewählten Teststrategie (links- oder rechtsseitiger Test) an. Auch sollte bei einseitigen Hypothesentests den Schülerinnen und Schülern deutlich werden, dass unendlich viele Zufallsgrößen X_p betrachtet werden müssen.

Anmerkung:

Alles **grau Markierte und Fettgedruckte** ist ausschließlich im erhöhten Niveau zu unterrichten.